Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft
Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Fachgebiet Informatik
Prof. Dr. Frank Schaefer
Prof. Dr. Ing. Astrid Laubenheimer

Maple-Labor
2. Aufgabenblatt

Die Aufgaben sind in Gruppen mit 3 Teilnehmern zu bearbeiten. Die Lösungen werden mündlich vorgeführt. Jeder Teilnehmer der Gruppe muss bei der Vorführung der Lösungen **alle Teilaufgaben erklären können**. Letzter Abgabe-Termin für dieses Aufgabenblatt ist in der Woche vom **30.11. bis 4.12.2009**. (Gerne auch früher)

Parameterdarstellung von ebenen Kurven

Im Folgenden betrachten wir Kurven, die über Parameterfunktionen dargestellt werden. Das bedeutet, dass die Kurven durch zwei Funktionen definiert werden:

$$f(t),\ g(t)$$

Die zwei Funktionen *f* und *g* ordnen so jedem Wert für *t* einen Punkt

$$P(t) = (f(t),g(t))$$

zu. Das heißt also für jeden Wert von t wird *f(t)* auf der x-Achse und *g(t)* auf der y-Achse abgetragen und wir erhalten so eine zweidimensionale Darstellung einer Kurve. Wir werden die Bogenlänge solcher Kurven bestimmen. Dabei kann man dann auf besonders anschauliche Weise sehen, was sich hinter dem Integralbegriff beim Bestimmen der Länge einer Kurve verbirgt.

Aufgabe 1:
Betrachten Sie als Beispiel für *f(t)* und *g(t)*:

$$f(t) = t^3 - 2t$$
$$g(t) = t^3 - 4t + 1.$$

Plotten Sie die zugehörige Kurve für $t = -2, \dots, +2$. Mit der Funktion „plot" in Maple können solche Darstellungen erzeugt werden.

Aufgabe 2:
Um nun die Bogenlänge für einen bestimmten Abschnitt (definiert durch *t = a..b*) der Kurve zu bestimmen, kann man das Intervall *a..b* in n gleiche Abschnitte $(t_0,\dots,t_n)$ unterteilen und die Kurve durch einen Streckenzug annähern. Dabei wird der Streckenzug definiert durch die *n+1* Punkte:

$$(f(t_0),g(t_0)),\ (f(t_1),g(t_1)),\ (f(t_2),g(t_2)),\ \dots,\ (f(t_n),g(t_n)).$$

Schreiben Sie eine Prozedur, die zu Vorgegebenem *a, b, n, f und g* den Streckenzug und die Kurve plottet. Testen Sie Ihre Prozedur für das Intervall *a=-2, b=2*, und *n = 10* mit den Funktion *f(t)* und *g(t)* aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3:
Erweitern Sie die Prozedur aus Aufgabe 2, so dass die Länge diese Streckenzuges bestimmt wird. Verwenden Sie dabei den Satz von Pythagoras, um die Länge der einzelnen Strecken zu berechnen. (Die Prozedur soll also wieder zu Vorgegebenem *a, b, n, f und g* arbeiten).

Aufgabe 4:
Für stetig differenzierbare Funktionen f und g lässt sich die Bogenlänge direkt durch

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt$$

berechnen. Dabei ist f'(t) die erste Ableitung der Funktion f(t), die mit dem Maple-Befehl „diff" leicht berechnet werden kann, entsprechend das Integral mit „int". Beachten Sie die Ähnlichkeit dieser Formel mit dem Satz von Pythagoras.
Schreiben Sie eine **Prozedur**, die auf die Eingabe von zwei Funktionen und einem Intervall („range" in Maple) die Bogenlänge berechnet. Die Prozedur soll neben der Bogenlänge auch

- die Funktionen f(t) und g(t),
- das Intervall und
- das noch nicht ausgewertete Integral (Hinweis: ?Int an Stelle von int)

anzeigen. (z.B. mit print).

Aufgabe 5:
Verwenden Sie die Prozedur aus Aufgabe 4, um den unter in Aufgabe 3 angenäherten Wert exakt zu bestimmen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Länge des Streckenzuges für n = 10, 20 und 30. Das Integral ist also einfach der Grenzwert der Berechnung, die Sie mit dem Pythagoras durchgeführt haben für immer größer werdendes n.

Aufgabe 6:

Zeichnen Sie einen dreiviertel Kreis mit den Techniken, die Sie in Aufgabe 1 kennen gelernt haben. Sinus und Cosinus sind dabei hilfreich. Bestimmen Sie mit Ihrer Prozedur die Bogenlänge.

Aufgabe 7:

Eine Zykloide wird definiert durch die beiden Parameterfunktion

$$f(t) = t + \sin(t),\; g(t) = 1 + \cos(t).$$

Plotten Sie die Zykloidenbahn für $t = -4\pi \;...\; 4\pi$ und bestimmen Sie die Bogenlänge für das Intervall $-1/2\,\pi \;...\; 3/2\,\pi$. Achten Sie bei diesem Plot darauf, dass die x-Achse und die y-Achse die gleich Skala haben (Hinweise: scaling=constrained). Wie kommt diese Zykloidenbahn zustande? Wir betrachten dazu folgende Zerlegung der Parameterfunktionen f(t) und g(t):

$$f1(t) = t \text{ und } g1(t) = 1$$

ergibt eine geradlinige Bewegung. Den weiteren Anteil

$$f2(t) = \sin(t) \text{ und } g2(t) = \cos(t)$$

haben Sie schon in Aufgabe 6 behandelt. Die Zykloidenbahn ist nun einfach die Überlagerung der beiden Bewegungen! Was bedeutet Überlagerung: stellen Sie sich eine Fahrradfabrik vor, bei der Fahrräder an einem Förderband hängend transportiert werden. Die beiden Funktionen f1 und g1 beschreiben die Fortbewegung der Fahrräder mit Geschwindigkeit t in Höhe 1. Wenn jetzt ein Rad sich gleichzeitig auch noch dreht, dann beschreiben f2 und g2 die Drehung und die Summe davon, also f und g beschreiben die Bewegung z.B. des Fahrradventiles in der Fabrik.
Plotten sie die Bewegung des Fahrrad-Ventiles für die geradlinige Geschwindigkeit **½ t** und **2 t**. Die Drehung des Rades soll dabei unverändert bleiben. Wie unterscheiden sich die drei verschiedenen Bahnen? Machen Sie sich klar, wodurch die Unterschiede zustande kommen.

Aufgabe 8: Bahn des Planeten Venus

Mit f(t) = sin(t*2π/365) + a*sin(b*t) und g(t) = cos(t*2π/365) + a*cos(b*t) kann eine Zykloidenbahn gezeichnet werden, bei der ein Kreis auf einem weiteren Kreis abgewickelt wird. Dies geschieht auch wieder einfach als Überlagerung von zwei Bewegungen. Konstruieren Sie die Bahn der Venus geozentrisch betrachtet. Dabei umkreist die Venus die Sonne in 225 Tagen. Mit einer Astronomischen Einheit bezeichnet man die Entfernung Erde – Sonne. Die Venus ist ca. 0.72 Astronomische Einheiten von der Sonne entfernt. Diese Angaben genügen, um die Werte von a und b zu bestimmen. Lassen Sie den Parameter t dabei von 0 bis 2500 (knapp 7 Jahre) laufen.

Aufgabe 9: Animierte Darstellung

Verbessern Sie die Darstellung der geozentrischen Bahn der Venus, indem Sie nicht die fertige Bahn zeichnen, sondern die Bewegung des Planeten. Dabei soll aber die Bewegung nicht so dargestellt werden, dass nur ein Punkt „herumsaust“ sondern es sollen zu jedem Zeitpunkt t alle von der Venus bis dahin erreichten Punkte dargestellt werden, also die gesamte Bahn, auf der sich die Venus bis zu dem dargestellten Zeitpunkt bewegt hat. Sie können dazu zum Beispiel eine Sequenz von Plots mit „seq“ bilden und diese mit „display“ und „insequence=true“ darstellen, oder auch den Befehl „animatecurve“ verwenden.

Aufgabe 10:

Die folgende Tabelle zeigt den Abstand von der Sonne und die Umlaufzeiten für die Venus und 3 weitere Planeten:

Venus:	0,72 AE	225 Tage
Mars:	1,52 AE	687 Tage
Merkur:	0,39 AE	88 Tage
Jupiter:	5,20 AE	4335 Tage

Wenn Sie sich die Bahnen der einzelnen Planeten ansehen wollen, brauchen Sie die entsprechenden Daten ja nur in Ihrer Implementierung aus Aufgabe 9 einzugeben!

Zum Abschluss dieses Praktikums stellen Sie die Bewegungen der 4 Planeten und der Sonne um die Erde simultan und animiert dar! Verwenden Sie dabei ggf. nur eine kürzere Darstellung, z.B. von 0 bis 2*π, da Sie sonst eventuell Schwierigkeiten mit der Rechenzeit bekommen.

Auf Karten des Sternenhimmels werden die Bahnen von Planeten vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels gezeigt. Dabei sind oft Schleifen in diesen Bahnen zu sehen, in denen die Planeten „rückläufig“ sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Planeten in die Schleifen bei unseren Diagrammen kommen.