Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft
Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Fachgebiet Informatik
Prof. Dr. Frank Schaefer
Prof. Dr. Ing. Astrid Laubenheimer

Maple-Labor
3. Aufgabenblatt

Die Aufgaben sind in Gruppen mit 3 Teilnehmern zu bearbeiten. Die Lösungen werden mündlich vorgeführt. Jeder Teilnehmer der Gruppe muss bei der Vorführung der Lösungen alle Teilaufgaben erklären **können**. Letzter Abgabe-Termin für dieses Aufgabenblatt ist in der **Woche vom 18.-22. Januar 2010**. (Gerne auch früher)

Animationen
Mehrfache Nullstellen von Funktionen

1.Aufgabe: Mit dem Maple-Befehl „implicitplot" können auch Funktionen und Relationen graphisch dargestellt werden, die nicht nach einer Variablen aufgelöst sind:
a) Probieren Sie das am Beispiel

$$x^2 + y^2 = 1$$

aus. Wählen Sie als Bereich z.B. x= -3,...,3 und y=-3...3. Verwenden Sie hierbei und auch bei den weiteren Aufgaben „scaling=constrained" beim plotten.
b) Plotten Sie außerdem die Funktion

$$x^2 - y^2 = 1$$

2.Aufgabe: Die beiden Formen aus Teil 1 und 2 kommen Ihnen sicher bekannt vor. Aufgabe ist es nun, einen kleinen Film von mindestens 20 Bildern zu machen, bei dem die eine Form kontinuierlich in die andere überführt wird.
Gibt's noch Fragen? Wie könnte man das erreichen? Beide obigen Funktion lassen sich darstellen durch

$$x^2 + a \cdot y^2 = 1$$

Das eine mal ist dann a=1 und das andere mal a=-1. Also muss diese Funktion für a=-1...+1 mit mindestens 18 Zwischenwerten für a gezeichnet werden. Für ein konstantes a ist das mit implicitplot klar. Schreiben Sie die mit implicitplot erzeugten Bilder in eine Liste, die Sie dann mit „display" anzeigen. (Am einfachsten vielleicht mit „seq"). Durch die Parametrisierung „insequence=true" können sie die 20 Bilder animiert anzeigen. Klicken Sie dazu auf das Bild und starten Sie den Film.
Zeigen Sie das ganze zusätzlich auch mit „insequence=false" an. Dann werden alle Bilder auf einmal angezeigt. Auch das Resultat sieht auch ganz nett aus...

3. Aufgabe: Mit der gleichen Funktion „implicitplot" zeichnen Sie jetzt folgende drei Kurven:

$$E1: y^2 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$E2: y^2 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$
$$E3: y^2 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

Diese Kurven heißen elliptische Kurven. Es sind Kurven vom Grad drei, so dass jede beliebige Gerade maximal drei Schnittpunkte mit einer der Kurven hat. Wählen Sie dabei den Bildausschnitt: x=0..4 und y=-3..3. Ferner können Sie hierbei und im Folgenden die Qualität der Darstellung durch die Parametrisierung „numpoints=10000“ bei Befehl „implicitplot“ erheblich verbessern. Falls die Rechenzeit zu stark ansteigt, reduzieren Sie den Parameter.

4. Aufgabe: Jetzt sollen Sie, wie in Aufgabe 3, eine Bildsequenz erstellen, die mit der elliptischen Kurve E1 startet, kontinuierlich in die Kurve E2 verwandelt wird, und dann kontinuiertlich in die Kurve E3 verwandelt wird. Diese Kurve E3 soll dann auch das letzte Bild dieses Films sein. Sie können die Aufgabe am besten in zwei Schritten lösen: erst einen Film von E1 bis E2, dann einen Film von E2 bis E3. Zum Schluss hängen Sie die beiden Filme einfach zusammen.
Die Vorgehensweise ist dabei wieder ähnlich, wie in Aufgabe 3. Sie Betrachten die Gleichung

$$E : y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

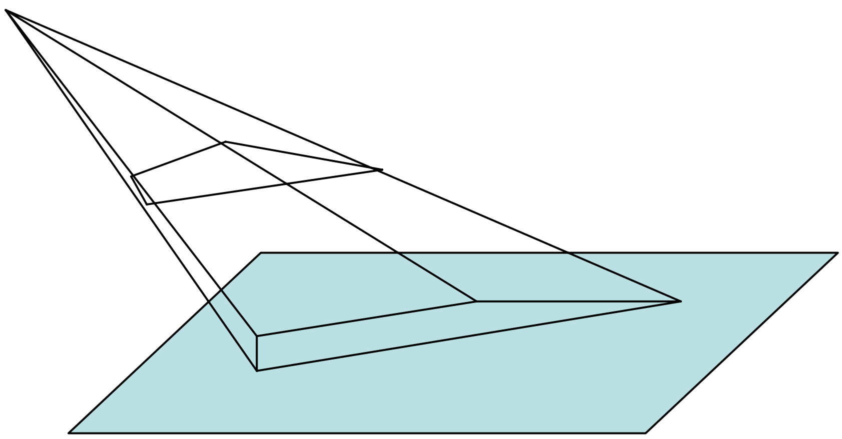
und müssen für den ersten Film a von –6 bis –7, b von 11 bis 15 und c von –6 bis –9 laufen lassen. Dies können Sie zum Beispiel mit folgender Parametrisierung erreichen:

a = (-6) - t/10 **b** = 11+4*t/10 **c** = (-6) - 3*t/10

für t=0, ..., 10 (Durch Einsetzen von t = 0 und t = 10 sehen Sie, dass dann a, b und c genau die vorgegebenen Intervalle durchlaufen).
Für den zweiten Film denken Sie sich ein ähnliche Parametrisierung selbst aus.

5. Aufgabe: Bestimmung der Nullstellen: wenn wir für diese implizit gegebenen Funktionen die Nullstellen bestimmen wollen, müssen wir einfach in der Gleichung für E y=0 setzen. Sie kenne bereits den Maple-Befehl „solve“. Berechnen sie damit die Nullstellen von E1, E2 und E3.
Alle drei Kurven liefern drei Nullstellen, nur manchmal sind die Nullstellen doppelt oder gar dreifach. Was „bedeutet“ nun doppelt und dreifache Nullstellen anschaulich? Betrachten Sie dazu noch mal Ihren Film!!!!

6. Aufgabe:
Im Folgenden werden wir eine Projektionsabbildung durch eine Matrix beschreiben. Stellen Sie sich als Modell vor, wir haben irgendwo eine Lichtquelle, halten ein beliebiges Viereck in das Licht und betrachten den Schatten auf einer Projektionsfläche:



Durch Vorgabe von vier Punkten und weiteren vier Punkten, auf die die Punkte abgebildet werden, ist die Abbildung **in einer Ebene** eindeutig definiert. Obwohl dieses Bildchen räumliche Verhältinisse darstellt, werden wir im Folgenden nur zweidimensional arbeiten.

Implementieren Sie die folgende Aufgabe prototypisch, aber doch so, dass sie für neue Wahl von Punkten auch komplett durchlaufen kann, also nicht irgendwelche Ergebnisse händisch bearbeiten !!!

a) Zeichnen Sie zwei Vierecke mit den vier Eckpunkten
   $P_1(0.05,0.2)$, P_2 $(1.1,0.3)$, $P_3(0.9,1.2)$, $P_4(0,1.0)$ bzw.
   Q_1 $(0.15,0.3)$, Q_2 $(1.0,0.4)$, $Q_3(0.80,0.80)$ $Q_4(0.04,0.95)$
   (z.B. mit with(geometry), point, segment, draw). Zeichnen Sie das Viereck mit den Pi rot und das Viereck mit den Qi blau.
b) Im Allgemeinen stellt man die Punkte für die algebraischen Berechnungen dann mit sog. homogenen Koordinaten dar, d.h. aus dem Punkt P(x,y) wird ein Spalten-Vektor der Länge 3: $(x,y,1)^t$.
   Stellen Sie alle 8 Punkte mit solchen Spaltenvektoren dar. Diese nennen wir z.B. v_1, v_2, v_3, v_4 und w_1, w_2, w_3, w_4.
   Hinweis: dabei ist folgendes zu beachten: jedes Vielfach eines solchen Vektors stellt den gleichen Punkt dar! Also die Vektoren (1,1,1) und (4,4,4) stellen z.B. den gleichen Punkt dar. Für eine Berechnung der normalen x,y Koordinaten muss also ein Vektor (x,y,z) umgerechnet werden zu: x/z und y/z, d.h. es ergibt sich der Punkt P(x/z, y/z).
c) Wir suchen jetzt die 3x3-Matrix, die v_1 auf w_1, v_2 auf w_2 usw. abbildet. Aber das ganze ist nicht eindeutig, da ein beliebiges Vielfaches dabei herauskommen kann. Also ist eine Matrix A gesucht mit:
   $$A.v_i = m_i.w_i, \quad \text{für } i = 1,2,3,4$$
   wobei links eine Matrix mal Vektor Multiplikation steht, aber rechts sind m_1, m_2, m_3 und m_4 einfache Skalare. Wir haben 9 Unbekannte aus der 3x3 Matrix und die vier Unbekannten Skalaren m_i, also insgesamt 13 Unbekannte. Die vier Vektoren liefern uns 12 Gleichungen. Stellen Sie diese 12 Gleichungen mit Maple auf und lösen Sie das Gleichungssystem (Hinweise: with(LinearAlgebra), Matrix, Vecor, MatrixVectorMultiply, VectorScalarMultiply, solve, ferner ist der Befehl **assign** sehr hilfreich, wenn Sie die Werte der Matrix schon berechnet haben.). Einen Wert aus der Matrix können Sie einfach frei wählen, z.B. $a_{11} := 1$. (Beliebige Vielfache einer Matrix stellen wieder die gleiche Abbildung dar)
d) Jetzt haben Sie mit Hilfe dieser Matrix die Abbildung beschrieben, die das eine Viereck in das andere Überführt. Damit können wir jetzt für einen weiteren Punkt P(0.6,0.6), den Sie wieder rot einzeichnen, prüfen, auf welchen Punkt Q er abgebildet wird. Q zeichnen Sie wieder blau. Dazu stellen Sie P wieder mit hom. Koordinaten dar und multiplizieren A mit diesem Spaltenvektor. Aus dem Spaltenvektor erzeugen Sie, wie oben beschrieben, wieder den Punkt mit seinen x bzw. y-Koordinaten.
e) Die Matrix A beschreibt eine Abbildung, die das eine Viereck in das andere überführt. Sie bildet aber gleichzeitig Geraden auf Geraden ab und erhält „Inzidenz", das heißt, wenn ein Punkt auf einer Geraden liegt, dann liegt auch der abgebildete Punkt auf der abgebildeten Geraden. Testen wir das an einem einfachen Fall: Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des roten Vierecks (Hinweis: intersection). Bilden Sie diesen Punkt mit A ab (wie in Teilaufgabe d)). Das Ergebnis muss den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des blauen Dreiecks ergeben. ☺