

## Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(64 Punkte, 90 Min.)

### Aufgabe 1: (8 = 3 + 2 + 3) Abbildungen

Gegeben sind die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{3x + 4}{2x - 1} \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{5}{2x - 3}$$

- Geben Sie die Umkehrabbildung  $f_1^{-1}(x)$  mit Definitionsbereich an.
- Ist die Funktion  $f_1$  injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Behauptung!
- Bestimmen Sie die verkettete Abbildung  $f_2 \circ f_1$  und vereinfachen Sie den Ausdruck.

### Aufgabe 2: (9 = 2 + 3 + 4) Gruppen

Untersuchen Sie, ob folgende Operationen eine Gruppe bilden! Begründen Sie Ihre Behauptungen!

- Bildet das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  für Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  eine Gruppenoperation?
- Bildet die Mittelpunktsbildung  $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$  für Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  eine Gruppenoperation?
- Bildet die Menge der Polynomfunktionen 1. Grades, also die Funktionen  $x \mapsto a_1x + a_0$  mit  $a_1 \neq 0$  eine Gruppe bzgl. der Verkettung von Funktionen?

### Aufgabe 3: (7 = 2+3+2) Kombinatorik

An der neugegründeten virtuellen Hochschule von Professor Binomi in Kombirlin gibt es einige kombinatorische Aufgaben zu lösen. Geben Sie bei den Lösungen jeweils auch die allgemeine Formel, mit der Sie die Antwort berechnen, mit an!

- Es werden zur Zeit  $n = 7$  Kurse mit Klausuren angeboten. Die Studenten dürfen genau  $m = 3$  Kurse wählen. Wieviele Möglichkeiten gibt es für den einzelnen Student?
- Die  $n = 7$  Kurse sollen jetzt doch in einer Studienordnung fest einem der drei Semester (Master-Kurs) zugeordnet werden. Dabei sollen dem ersten Semester  $k = 3$ , dem zweiten Semester  $l = 3$  und dem dritten Semester  $m = 1$  Kurse fest zugeordnet werden. Wieviele mögliche Studienordnungen gibt es?
- Bei der Verleihung der Abschlusszeugnisse darf jeder der  $n = 10$  Absolventen zwischen einem weinroten und einem schwarzen Talar wählen. Wie viele Wahl-Möglichkeit gibt es insgesamt?

**Aufgabe 4: (4) Potenzieren mit Restklassen**

Berechne Sie (Hinweise: kleiner Satz von Fermat):

$$2^{165} \bmod 17$$

**Aufgabe 5: (8 = 2+3+3) Polynome**

- Gegeben ist das Polynom  $p(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ . Werten Sie mit Hilfe des Horner-Schemas das Polynom an der Stelle 7 aus.
- 2 ist eine Nullstelle des Polynomes  $p(x)$ . Spalten Sie diese Nullstelle mit Hilfe des Horner-Schemas von  $p(x)$  ab und bestimmen Sie die übrigen Nullstellen.
- Neben Polynomen über  $\mathbb{R}$  hatten wir in der Vorlesung auch Polynome über dem kleinsten, endlichen Körper  $F_2$  bestehend aus 0 und 1 behandelt. Bestimmen Sie für die beiden Polynome  $x^3 + x^2 + x + 1$  und  $x^3 + x^2 + 1$  ob sie über  $F_2[x]$  irreduzibel sind. Begründen Sie ihre Behauptung!

**Aufgabe 6: (8 = 2 + 2 + 4) Vektorräume**

- Was versteht man unter einer Basis eines Vektorraumes? Nennen Sie die wesentlichen Eigenschaften!
- Wann nennen wir  $n$  Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  eines Vektorraumes linear unabhängig?
- Für welche  $t \in \mathbb{R}$  sind die drei Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig, wobei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 7: (6 = 2+4) Skalarprodukt**

Gegeben sind die Vektoren der Seitenkanten eines Dreiecks:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.
- Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes die beiden anderen Winkel des Dreiecks. Lassen Sie Wurzeln oder den Kosinus einfach stehen, da Sie ja keinen Taschenrechner zur Verfügung haben.

**Aufgabe 8: (14 = 4 + 3 + 4 + 3) Lineare Gleichungssysteme**

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - cx_3 &= 1 \end{aligned}$$

- Für welche Werte von  $c$  ist das lineare Gleichungssystem lösbar?
- Beschreiben Sie die linke Seite des Gleichungssystems als Matrix  $A$ . Berechnen Sie die Determinante von  $A$  für  $c := -2$ .
- Berechnen Sie die inverse Matrix zu  $A$ , ebenfalls für  $c := -2$ .
- Lösen Sie das Gleichungssystem für diesen Spezialfall  $c := -2$ .